EXERCICE N°1 : 25' 4 points

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} x - 1 + e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)} & \text{si } x < 1 \\ \frac{\ln x}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

2) a) Montrer que $\forall\ x \leq 0$ on a $x^2 . e^x < 1$. En déduire que $\forall\ x \in]-\infty, 1[$ on a $f'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f. Construire ζ_f.

EXERCICE N°2 : 25' 5 points

1) Déterminer le signe de $g(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{e^x - 2}$. **a)** Etudier les variations de f.

b) Montrer que la droite $\Delta : y = x + 1/2$ est une asymptote de ζ_f.

c) Quelles sont les positions relative de ζ_f par rapport à Δ. **3)** Tracer ζ_f et Δ.

4) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, \text{Log}\,2[$, $f(x) = x + 1/2 + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$. En déduire une primitive de f.

EXERCICE N°3 : 30' 5 points

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement le résultat.

3) Etudier les variations de f est tracer la courbe ζ_f.

4) a) démontrer que f réalise une bijection de D_f sur un intervalle E que l'on déterminera.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x élément de E. c) Tracer dans le même repère $\zeta_{f^{-1}}$.

5) Vérifier que $\forall\ x \in D_f \setminus \{0\}$ on a : $f(x) = f'(x).\left(-1 + \frac{1}{2(1+f(x))} + \frac{1}{2(1-f(x))}\right)$. En déduire une primitive de f sur $D_f \setminus \{0\}$.

6) Soit g la fonction définie par $g(x) = -x + 1/2 \ln\left(e^{2x} - 1\right)$. Vérifier que $\forall\ x \in D_f \setminus \{0\}$ on a : $g(x) = \ln\left(f(x)\right)$. Etudier les variations de g et construire sa courbe.

EXERCICE N°4 : 30' 5 points

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\, e^{\left(\frac{1-x}{2}\right)}$.

Dresser le tableau de variation de f. En déduire que pour tout réel $x \in [0\ ,\ 1]$, $0 \le f(x) \le 1$.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{1}{n!\,.\,2^{n+1}} \displaystyle\int_0^1 x^n\, e^{\left(\frac{1-x}{2}\right)}\, dx$ et $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!\,.\,2} + \dfrac{1}{2!\,.\,2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n!\,.\,2^n}$.

a) Montrer que $I_1 = \sqrt{e} - \dfrac{3}{2}$. **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{1}{(n+1)!\,.\,2^{n+1}}$.

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{e} - I_n$.

d) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n\,(n!)\,2^{n+1}}$. Déduire la limite de u.

EXERCICE N°5 : 40' 6 points

Soit f la fonction définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère ON (unité 3cm).

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$; $f(x) = x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$.

b) En déduire que la droite D : y = x est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) et D.

c) Dresser le tableau de variation de f. Construire (C) et D.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\ ,\ +\infty[$ sur $[\ln 2\ ,\ +\infty[$.

b) Tracer (C') la courbe de f^{-1} sur le même repère que (C).

3) Pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$.

a) Soit $\alpha > 0$. Donner une interprétation géométrique de $F(\alpha)$.

b) Etudier le sens de variations de F sur $[0\ ,\ +\infty[$.

c) Soit $x > 0$. Montrer que pour tout $t \in [1\ ,\ 1+x]$, on a : $\dfrac{1}{1+x} \le \dfrac{1}{t} \le 1$ puis déduire que

$\dfrac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$.

d) Soit $x > 0$. Montrer alors que $\dfrac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln\left(1 + e^{-2x}\right)\right] \le F(x) \le \dfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2x}\right)$.

4) Pour tout entier n on pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \ln\left(1 + e^{-2t}\right) dt$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le \ln\left(1 + e^{-2n}\right)$. En déduire la limite de u.

b) Montrer que $S_n = F(n+1)$. En déduire que (S_n) est convergente.